数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 47-51

Extensions and Cohomology of Association Schemes

飛田　明彦 (Akihiko Hida)
埼玉大学教育学部
Faculty of Education, Saitama University

1. Introduction

K を群, M を K の (可換な) 正規部分群, $G = K/M$ とする. このとき, K は G の M による (あるいは, M の G による) 拡大であると言われる. 共役の作用により, M は G-加群とみることができる. そして, factor set と呼ばれる写像 $G \times G \longrightarrow M$ を通して G の M による拡大は２次の cohomology 群 $H^2(G, M)$ の元と対応していることが知られている ([B],[S]).

一方, association scehme は有限群を拡張したものと見ることができるが, [BH] ではこの様な群の拡大の理論を一般化し, 群の拡大として association scheme の構成を行っている. また, [H] では (群とは限らない) association scheme の可換群による拡大を考察している. ここでは, [BH] のアイデアに基づきこれら両者を統合した理論を紹介したい.

なお, [BH] では M が可換でない場合も含めて述べられているが, ここでは可換の場合に限定する. また２次以外の cohomology 群, 特に１次の cohomology については [H] に述べられている.

2. Association Schemes

ここでは [Z] に従い, association scheme, 特に closed subset と factor association scheme についてごく簡単に述べる.

Definition 2.1 X を有限集合, G を $X \times X$ の分割, つまり $X \times X = \bigcup_{g \in G} g$ は disjoint で $\emptyset \notin G$ とする. また $1_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$ であり, $g \in G$ ならば $g^* = \{(y,x) \mid (x,y) \in g\} \in G$ であるとする. さらに, 任意の $g, h, k \in G$ に対し, $a_{ghk} \in \mathbb{Z}$, $a_{ghk} \geq 0$ で任意の $(x,y) \in k$ に対して

$$|\{z \in X \mid (x,z) \in g, (z,y) \in h\}| = a_{ghk}$$

をみたすものが存在するとき, (X, G) を association scheme という.

Example 2.2 G を有限群とし, $g \in G$ に対して,

$$\tilde{g} = \{(x,y) \in G \times G \mid y = xg\}$$

$$\tilde{G} = \{\tilde{g} \mid g \in G\}$$

とおく. このとき $(G, \tilde{G})$ は association scheme となる.

Definition 2.3 (X,G) を association scheme とする. $g,h \in G$ に対して,

$$gh = \{l \in G \mid a_{ghl} > 0\}$$

とおく. また, $(x,y) \in g$ のとき $xy = g$ とおく.

Definition 2.4 association scheme (X,G) が thin であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して,

$$|\{y \in X \mid (x,y) \in g\}| = 1$$

となることである.

Remark 2.5 (X,G) が thin association scheme のとき, G は群構造を持つ. つまり, 任意の $g,h \in G$ に対し $|gh| = 1$ であり, $gh = \{k\}$ のとき $gh = k$ とおくことにより G は群となる. このとき, $(X,G) \simeq (G,\tilde{G})$ である.

Definition 2.6 (X,G) を association scheme とする. $H(\neq \emptyset) \subseteq G$ が G の closed subset であるとは, 任意の $h,k \in H$ に対して, $h^*k \subseteq H$ となることである.

Definition 2.7 (X,G) を association scheme, H を G の closed subset とする. $x \in X$ に対し,

$$xH = \{y \in X \mid xy \in H\}$$

$$H_{xH} = \{h_{xH} \mid h \in H\} \text{ ただし } h_{xH} = \{(y,z) \in h \mid y,z \in xH\}$$

とおく. また $g \in G$ に対し,

$$g^H = \{(xH, yH) \mid xy \in hgk,\ \exists h,k \in H\}$$

とおき,

$$X/H = \{xH \mid x \in X\}$$

$$G//H = \{g^H \mid g \in G\}$$

とおく.

Proposition 2.8 (X,G) を association scheme とする.
(1)([Z, Theorem 1.5.1]) closed subset H と $x \in X$ に対して, (xH, H_{xH}) は association scheme である.
(2)([Z, Theorem 1.5.4]) closed subset H に対して, $(X/H, G//H)$ は association scheme である.
(3)([Z, Theorem 2.3.4]) $(X/R, G//R)$ が thin となる様な最小の closed subset R が存在する. (thin residue と呼ばれる.) 以下, $\tilde{G} = G//R$ とおく.

Definition 2.9 G の closed subset H と $g \in G$ に対して,

$$gH = \cup_{h\in H} gh,\ Hg = \cup_{h\in H} hg$$

とおく. 任意の $g \in G$ に対しこれらが一致するとき H を normal closed subset という.

3. Extensions of association schemes

まず短完全列の定義を行いたい. 以下 association scheme (X,G) に対し, $x_0 \in X$ を固定しておく.

Definition 3.1 (X,G), (Y,H), (Z,K) を assocoation scheme とする.

$$(Y,H) \xrightarrow{\alpha} (Z,K) \xrightarrow{\beta} (X,G)$$

が次をみたすとき, この列を (X,G) の (Y,H) による拡大であるという.
(1)$\alpha = (\alpha_Y, \alpha_H)$, $\beta = (\beta_Z, \beta_K)$ は association scheme の homomorphism ([Z]) で, α_Y, α_H は単射, β_Z, β_K は全射である.
(2)$\beta_K^{-1}(1_X) = \mathrm{Im}\ \alpha_H$.
(3)$\beta_Z^{-1}(x_0) = \mathrm{Im}\ \alpha_Y$.

Example 3.2 (X,G) を assocoation scheme, H を G の closed subset とする. このとき, 自然な準同型の列

$$(x_0H, H_{x_0H}) \longrightarrow (X,G) \longrightarrow (X/H, G//H)$$

は $(X/H, G//H)$ の (x_0H, H_{x_0H}) による (基点 x_0H に関する) 拡大である.

次に 2 つの拡大が同値であるということを群の拡大の場合と同様に定義する.

Definition 3.3 2 つの拡大

$$E_i\ :\ (Y,H) \xrightarrow{\alpha_i} (Z_i,K_i) \xrightarrow{\beta_i} (X,G) \qquad (i=1,2)$$

に対し, 同型

$$\varphi : (Z_1,K_1) \xrightarrow{\sim} (Z_2,K_2)$$

で $\varphi\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2\varphi$ をみたすものが存在するとき, E_1 と E_2 は同値であるという.

(X,G) を association scheme, $x_0 \in X$, とする. M を有限アーベル群 (加法群) とする. [BH] に従い, $\bar{G}$ の M への作用の拡張を考える. $P(M) = \{A \subseteq M \mid A \neq \emptyset\}$ とおく.

Definition 3.4 $\phi : P(M) \longrightarrow P(M)$ が次をみたすとき, S-automorphism と呼ぶ.

$$\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B),\ \phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)\ (\forall A, B \in P(M))$$

$$\phi(M) = M.$$

$\mathrm{SAut}(M)$ を S-automorphism の全体とする. 以下 3 章を通じて次を仮定する.

Assumption 3.5

$$\bar{G} \longrightarrow \mathrm{SAut}(M),\ \bar{g} \mapsto [m \mapsto m\bar{g} = mg]$$

が与えられ, 次の条件をみたす. $g, h \in G$, $m \in M$ に対して,

$$m1_X = m,\ 0g^* = \{m \in M \mid mg = 0g\}$$

$$(m\bar{g})\bar{h} = m(\bar{g}\bar{h}) + (0g)h$$

Definition 3.6

$$C(X,M)=\{f:X\times X\longrightarrow M\mid f(x_0,x)=f(x,x)=0,\ \forall x\in X\}$$

とおく．また $f\in C(X,M)$ に対して，

$$X_f=X\times M,\ G_f=\{(g,m)_f\mid g\in G, m\in M\}$$

$$(g,m)_f=\{((x_1,m_1),(x_2,m_2))\mid x_1x_2=g, m_2\in m+f(x_1,x_2)+m_1g\}$$

とおく．

このとき，G_f は $X_f\times X_f$ の分割となる．そこで，X_f, G_f が association scheme となる場合を考えたい．

Definition 3.7

$$\tilde{Z}(X,M)=\{f\in C(X,M)\mid (X_f,G_f):\text{association scheme}\}$$

$\hat{Z}(X,M)$ を $f\in C(X,M)$ で，任意の x_1,x_2,x_3 に対して，

$$-f(x_2,x_3)+f(x_1,x_3)-f(x_1,x_2)x_2x_3+(0x_1x_2)x_2x_3$$

が x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 のみに依るものの全体とする．

$\hat{Z}(X,M)$ の元は群の拡大のときの factor set の自然な拡張と見られるが，次が成立する．

Theorem 3.8

$$\hat{Z}(X,M)\subseteq\tilde{Z}(X,M).$$

$f\in\tilde{Z}(X,M)$ ならば association scheme (X_f,G_f) が得られるが，これは自然に (X,G) の拡大となっている．

Lemma 3.9 $f\in\tilde{Z}(X,M)$ ならば，

$$E_f\ :\ (M,\tilde{M})\xrightarrow{\alpha}(X_f,G_f)\xrightarrow{\beta}(X,G)$$

$$\alpha(m)=(x_0,m),\ \alpha(\tilde{m})=(1_X,m)_f$$

$$\beta(x,m)=x,\ \beta((g,m)_f)=g$$

は assocoation scheme の拡大である．

Theorem 3.10(Bang-Hirasaka, [BH]) (X,G) が thin ならば，(X,G) の $(M,\tilde{M})$ による拡大は全てこの様にして得られる．

次に拡大が同値となるための条件を考える．

Definition 3.11 $B(X,M)$ を $f \in C(X,M)$ で

$$p : X \longrightarrow M,\ q : G \longrightarrow M,\ p(x_0) = q(1_X) = 0$$

が存在して

$$f(x_1,x_2) \in q(x_1x_2) - p(x_2) + p(x_1)x_1x_2 \quad (\forall x_1, x_2)$$

となるものの全体とする.

Theorem 3.12 (1)$B(X,M) \subseteq \hat{Z}(X,M)$.
(2)$E_f \sim E_{f'} \Leftrightarrow f - f' \in B(X,M)$.

次に cohomology 群の類似を定義してみる.

Definition 3.13

$$\tilde{H}((X,G),M) = (\tilde{Z}(X,M) + B(X,M))/B(X,M)$$

とおく. また, $E((X,G),M)$ を次の条件 (1)(2) をみたす拡大

$$(M,\tilde{M}) \xrightarrow{\alpha} (Z,K) \xrightarrow{\beta} (X,G)$$

の同値類の全体の集合とする：

(1)$\alpha(\tilde{M})$ は K の normal closed saubset.
(2)(M と $\alpha(\tilde{M})$ を同一視することとして)

$$mg = k^*mk \cap M,\ g \in G,\ g = \beta(k)$$

と定義すると 3.5 の仮定をみたしている.

$\tilde{H}((X,G),M)$ はこの条件をみたす拡大の同値類を記述していることがわかる.

Theorem 3.15

$$\tilde{H}((X,G),M) \simeq E((X,G),M).$$

References

[BH] S. Bang and M. Hirasaka, *Construction of association schemes from difference sets*, preprint, 2003.

[B] K. S. Brown, Cohomology of Groups, Graduate texts in mathematics, 87, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982.

[H] A. Hida, *Cohomology of groups and association schemes*, 数理解析研究所講究録 1357, 有限群のコホモロジー論の研究 (2004), 87-94.

[S] 鈴木通夫, 群論 (上), 岩波書店, 1977.

[Z] P.-H. Zieschang, An algebraic approach to Association schemes, Lecture Notes in Mathematics 1628, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996.